Capitolul I. ALGEBRA LINIARA

#1. Spatii vectoriale

Definitia I.1.1. Fie V o multime nevida si K un corp. Spunem ca pe V s-a definit o structura algebrica de *spatiu vectorial* (sau *spatiu liniar*) peste copul K daca pe V sunt definite:

- o lege de compozitie interna notata aditiv:

+ : VV V (,)

- o lege de compozitie externa notata multiplicativ:

K V V (,)

care îndeplinesc urmatoarele proprietati:

1). (V, +) este un grup

2). *i*) =

ii) ,

iii)

iv) 1

Vom nota aceasta structura (V,K).

Observatia I. 1.1. (V, +) este grup daca:

a) asociativitatea legii de compozitie "+")

b) încât (se numeste element neutru la adunarea vectorilor).

c). astfel încât

Observatia I.1.2. Elementele lui V se numesc *vectori*, iar elementele lui K *scalari*. Operatia "+" se va numi *adunarea vectorilor* iar operatia "" *înmultirea vectorilor cu scalari*.

Observatia I.1.3. Am notat cu 1 *elementul unitate* din corpul K, iar cu *vectorul nul* din V. Dupa cum se vede, pentru a deosebi vectorii de scalari, am notat în mod deosebit vectorii (Totusi pentru usurinta scrierii vom renunta la aceasta notatie, dar vom continua sa desemnam, pe cât posibil, vectorii cu litere mici ale alfabetului latin (a,b,x,y,etc.), iar scalarii cu litere mici ale alfabetului grec (

Propozitia I.1.1. (*Reguli de calcul în spatiul vectorial*). Au loc:

1. 0 x =
2.
3. (-1)
4.

Demonstratie

1. 0 =

2.

3. Din 0

[1+ (-1)]

Dar stim ca x + (-x) =

4. Daca egalitatea este evidenta.

Daca astfel încât Atunci

.

Propozitia I.1.2. În (V,K) are loc:

x + y = y + x (comutativitatea adunarii vectorilor, deci (V,+) este grup abelian)

Demonstratie.

(1+1)(x+y) = (1+1)x + (1+1)y = x + x + y + y.

(1+1)(x+y) = 1 (x+y) + 1(x+y) = x + y + x + y

Deci x + x + y + y = x + y + x + y, de unde adunând la stânga cu -x si la dreapta cu -y obtinem x + y = y + x .

Exemple de spatii vectoriale:

Exemplul I.1.1. Fie M(m,n,K) multimea matricelor cu *m* linii si *n* coloane cu elemente din corpul K. Aceasta multime formeaza un spatiu vectorial peste corpul K fata de operatiile obisnuite de adunare a matricelor si înmultire a matricelor cu scalari.

O importanta deosebita o au urmatoarele doua cazuri particulare:

Exemplul I.1.2. Fie M(1,n,K) multimea matricelor cu o singura linie si cu n coloane, cu elemente din corpul K. Aceasta multime se mai noteaza:

K

Elementele lui K^n se numesc vectori *linie n-dimensionali*. Operatiile de adunare a vectorilor linie n-dimensionali si de înmultire a acestora cu scalari devin:

Daca si avem

Se verifica usor ca K^n împreuna cu aceste doua operatii este un K - spatiu vectorial.

Exemplul I.1.3. Fie M(n,1,K) multimea matricelor cu o singura coloana si n linii cu elemente din corpul K, care se pot nota:

Pentru definim:

Elementele lui K^n , în acest caz se numesc *vectori coloana* n-dimensionali. Si în acest caz (K^n,K) este spatiu vectorial.

Deoarece multimile M(1,n,K) si M(n,1,K) se deosebesc doar prin modul de scriere a elementelor, în practica se vorbeste doar despre *vectori n-dimensionali*, tipul acestora -linie sau coloana- subîntelegându-se din context.

Spatiul (R^n,R) se numeste spatiul vectorial real n-dimensional, iar (C^n, C^n) spatiul vectorial complex n-dimensional.

Exemplul I.1.4. Multimea polinoamelor cu coeficienti reali de grad cel mult egal cu n (nN) formeaza spatiu vectorial peste corpul R, fata de operatiile obisnuite de adunare a polinoamelor si înmultire a polinoamelor cu scalari.

Liniar dependenta. Liniar independenta.

În continuare, toate consideratiile vor fi facute referitor la (V,K) un spatiu vectorial.

Definitia I.1.2. Fie S = un sistem de vectori din V.

Spunem ca un vector xse scrie ca o combinatie liniara de vectorii sistemului S daca exista astfel încât:

Definitia I.1.3. Spunem ca sistemul S este *liniar dependent* (sau ca vectorii sunt *liniari dependenti*), daca exista scalarii nu toti nuli, astfel încât:

Altfel spus, vectorii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt liniari dependenti daca exista cel putin o combinatie liniara nula a lor cu nu toti scalarii nuli.

Definitia I.1.4. Spunem ca sistemul S este *liniar independent* daca nu este liniar dependent.

Observatia I.1.4. Vectorii $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt liniari independenti daca din orice combinatie liniara nula a lor rezulta toti scalarii zero.

Observatia I.1.5. A studia dependenta sau independenta liniara a unui sistem finit de vectori revine la a forma o combinatie liniara nula a lor si a cauta informatii despre scalarii combinatiei.

Exemplul I.1.5. În K^n vectorii e_1 = (1,0,...,0); e_2 = (0,1,0,...0), ..., e_n = (0,....,0,1) sunt liniar independenti.

Într-adevar din rezulta
(ceea ce implica

Exemplul I.1.6. În spatiul vectorial al polinoamelor cu coeficienti reali, de grad cel mult n, polinoamele: 1, X, X^2,......, X^n sunt liniar independente .

Într-adevar, daca este o combinatie nula a acestor polinoame (aici este polinomul nul prin identificarea coeficientilor rezulta

Propozitia I.1.3. Într-un spatiu vectorial au loc:

i) Orice sistem de vectori care contine vectorul nul este liniar dependent.

ii) Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.

iii) Orice suprasistem al unui sistem liniar dependent este liniar dependent.

Demonstratie

i) Fie sistemul de vectori . Este clar ca folosind sistemul de scalari obtinem:

ceea ce verifica definitia I.1.3.

ii) Fie sistemul de vectori liniar independent si fie

S' = un subsistem al lui S (

Presupunem, prin reducere la absurd ca S' este liniar dependent, adica exista scalarii nu toti nuli, astfel încât:

Atunci putem scrie:

unde

Deci am obtinut o combinatie liniara nula a vectorilor din sistemul S,cu nu toti coeficientii nuli, ceea ce înseamna ca S este liniar dependent.

Contradictie cu ipoteza.

iii) Fie un sistem de vectori liniar dependenti; deci exista nu toti nuli, astfel încât

Atunci pentru orice suprasistem de vectori al lui S, avem:

ceea ce înseamna ca suprasistemul este liniar dependent.

<u>Definitia I.1.5</u>. Un *sistem infinit* de vectori este *liniar independent* daca orice subsistem finit al sau este liniar independent.

<u>Propozitia I.1.4</u>. Sistemul de vectori este liniar dependent daca si numai daca cel putin unul dintre ei se scrie ca o combinatie liniara a celorlalti.

Demonstratie. "*necesitatea*"

Presupunem ca S este liniar dependent. Deci exista , nu toti nuli, astfel încât .

Deoarece scalarii nu sunt toti nuli, atunci exista cel putin un indice astfel încât ceea ce înseamna ca exista si inversul sau În aceste conditii din relatia:

înmultita cu obtinem:

Deci se scrie ca o combinatie liniara de ceilalti vectori.

"*suficienta*"

Presupunem ca din sistemul S, vectorul se scrie ca o combinatie liniara a celorlalti:

, de unde obtinem:

Cum nu toti scalarii acestei combinatii liniare nule sunt zero rezulta ca S este liniar dependent.

Propozitia I.1.5. Fie un sistem de vectori liniari independenti. Daca suprasistemul este liniar dependent atunci se scrie ca o combinatie liniara de vectorii sistemului S.

Demonstratie. Deoarece S' este liniar dependent, exista , nu toti nuli, astfel încât:
(1)

Afirmam ca

Într-adevar, daca atunci am avea , si cum S este liniar independent rezulta . Atunci în relatia (1) toti scalarii sunt nuli. Contradictie.

Daca atunci ,

adica se scrie ca o combinatie liniara de vectorii sistemului S.

Dimensiune si baza într-un spatiu vectorial

Definitia I.1.6. Spunem ca spatiul vectorial (V, K) are *dimensiunea n* daca exista în V n vectori liniari independenti si oricare ar fi n+1 vectori din V, acestia sunt liniar dependenti.

Exemplul I.1.7. Dimensiunea lui R

Consideram vectorii e==. Formam o combinatie nula a lor:

+ =0 ,

Tinând seama de definitia operatiilor în obtinem succesiv:

+=

=.

ceea ce implica . Deci e

Consideram acum trei vectori oarecare din R:

a ; b= ; c=

Studiem liniar dependenta lor :

=(0, 0)

Am obtinut un sistem omogen de doua ecuatii cu trei necunoscute Acest sistem admite si solutie nebanala . În consecinta nu toti scalarii

Demonstratia faptului ca dim R =2 s-a încheiat.

Observatia I.1.6. Dimensiunea unui spatiu este egala cu numarul maximal de vectori liniari independenti din acel spatiu.

Definitia I.1.7. Într-un spatiu vectorial de dimensiune n, (V,K), un sistem de *n* vectori liniari independenti se numeste *baza* a lui V.

Observatia I.1.7. Un sistem maximal de vectori liniar independenti înt-un spatiu vectorial constituie o baza în spatiul vectorial respentiv, iar dimensiunea bazei si dimensiunea spatiului coincid.

Teorema I.1.1. Orice spatiu vectorial are baza.

Demonstratie. Demonstratia acestei teoreme foloseste rezultate din teoria multimilor si a relatiilor definite pe o multime. Fara a intra în amanunte prezentam schita acestei demonstratii :

Fie (V,K) spatiu vectorial. Consideram:

P_{ind} (V)= { | A liniar independenta} - multimea tuturor submultimilor liniar independente din V.

P_{ind} (V) împreuna cu relatia obijnuita de incluziune a multimilor "", devine o multime inductiv ordonata. Atunci conform lemei lui Zorn exista elemente maximale în P_{ind} (V), deci exista baze în V.

Observatia I.1.8. Un spatiu vectorial poate avea mai multe baze, dar toate au aceeasi dimensiune (numar de elemente).

Definitia I.1.8. Daca numarul de vectori liniari independenti dintr- un spatiu vectorial este nemarginit atunci spunem ca spatiul respentiv este *infinit dimensional.*

Definitia I.1.9. Spunem ca un sistem de vectori SV este *sistem de generatori* pentru V, daca orice vector xV se scrie ca o combinatie liniara a vectorilor din S.

Teorema I.1.2. Fie V un spatiu vectorial peste corpul K.
Sistemul B=V este baza a lui V daca si numai daca au loc:

1) B este liniar independent
2) B este un sistem de generatori pentru V.

Demonstratie " *necesitatea* "

Presupunem ca B este baza. Atunci, conform definitiei bazei, B este liniar independent si dim V=n. Atunci () *x*V sistemul de n+1 vectori este liniar dependent. Conform propozitiei I.1.5. vectorul *x* se scrie ca o combinatie liniara a vectorilor din B. Deci B este si sistem de generatori pentru V.

" *suficienta* "

Presupunem ca B este liniar independent si constituie un sistem de generatori pentru V. Fie S= un sistem de n+1 vectori arbitrari din V si fie:
(2)
o combinatie liniara nula a lui S.(Cum B este sistem de generetori pentru V, atunci fiecare vector ą , i=se va scrie ca o combinatie liniara a vectorilor din B:

a_i = i=1,2,...,n+1., cunoscuti.

Relatia (2) devine:
(3)
ceea ce conduce la :
(4)
ceea ce reprezinta o combinatie liniara nula a vectorilor liniar independenti . Deci toti scalarii combinatiei vor fi nuli:
(5) () k=

Necunoscutele fiind , relatia (5) reprezinta un sistem liniar omogen de n ecuatii cu n+1 necunoscute. În acest caz sistemul admite si solutii nebanale. Rezulta ca nu toti scalarii sunt nuli, si revenind la relatia (2) ca oricare n+1 vectori din V sunt liniar dependenti. Atunci B constituie o baza pentru V.

Propozitia I.1.6. Într-un spatiu vectorial, orice sistem de vectori liniari independenti poate fi completat pâna la o baza a spatiului.

Demonstratie: Fie B=o baza si F= m<n ,un sistem de vectori liniari independenti. Vom demonstra ca este o baza.

Sa studiem liniar independenta vectorilor din F' . Fie:

(6)

o combinatie liniara nula a lor. Fiecare vector din F se scrie ca o combinatie liniara a vectorilor din B :

(7) f_i = i=

Înlocuind (7) în (6) obtinem:

(8)

Sau:

(9)

+

De unde:

(10)

Necunoscutele fiind , determinantul sistemului este :

=

Afirmam ca determinantul obtinut este nenul.

Într-adevar, deoarece sunt liniar independenti , atunci din orice combinatie liniara nula a lor :

(11)

rezulta toti scalarii zero. Dar tinând seama de relatia (7), (11) devine :

(12)

un sistem liniar omogen care admite numai solutia banala, deci determinantul sistemului este nenul :

Revenind la (10) rezulta .

Deci F'este liniar independent si cum dim V=n , F' constituie o baza pentru V

Propozitia I.1.7. Din orice sistem de generatori se poate extrage o baza.

Demonstratie Fie S=un sistem de generatori pentru spatiul vectorial V. Din S extragem un subsistem B=, sn , de vectori liniari independenti, maximal în felul urmator :

Se considera B=. Daca toti vectorii x_2 ,x_3 , ...,x_n se scriu ca o combinatie liniara de x_1 (adica x_i =. În acest caz, fie x_2 un vector ce nu se scrie sub forma x_2 =, , pe care îl introducem în B.

Deci B= este liniar independent, caci nici unul din vectorii sai nu se scrie ca o combinatie liniara de ceilalti vectori din B.

Daca toti vectorii x_3 ,x_4 ,...,x_n se scriu ca o combinatie liniara de vectorii sistemului B atunci s=2.

În caz contrar rationamentul se repeta si evident, dupa un numar finit de pasi, gasim B= liniar independent, maximal. Ramâne sa dovedim ca B este un sistem de generatori pentru V. Sistemele i=s+1,...,n sunt liniar dependente si în plus vectorii x_i , i= se scriu ca o combinatie liniara de x_1 ,...,x_s :

(13) i=s+1,s+2,...,n

Deoarece S este sistem de generatori atunci orice vector x se scrie ca o combinatie liniara de vectorii sistemului S :

(14)

Dar tinând seama de (13), relatia (14) devine:

(15)

, unde , .

În concluzie orice vector xV se scrie ca o combinatie liniara a vectorilor din B, rezulta ca B este si sistem de generatori pentru V, deci baza înV.

Teorema I.1.3. Scrierea unui vector în raport cu o baza este unica.

Demonstratie Fie (V,K) un spatiu vectorial, B=o baza pentru V si xa scrierea lui x în raport cu B nu este unica. Deci exista astfel încât:

(16)

si exista astfel încât:

(17)

Înmultind relatia (17) cu -1 si adunând-o la (16) obtinem:

(18)

Cum e_1 ,...,e_n sunt liniar independenti rezulta

Deci si scrierea lui x în raport cu vectorii din B este unica.

Definitia I.1.10. Fie exprimarea (scrierea) vectorului xV în raport cu baza B=. Scalarii x_1 ,x_2 ,...,x_n se numesc *coordonatele* vectorului *x* în baza B.

Exemplu I.1.8. În R^2 fie baza B=, e_1 =(1,0) si e_2 =(0,1) si xR^2 , x=(4,3). Cum x=4e_1 +3e_2 , coordonatele lui x în baza B sunt 4 si 3.

Exemplul I.1.9. În R^2 fie baza B' =, f_1 =(1,1), f_2 =(1,2) si x=(4,3). Deoarece x=5f_1 -f_2 , coordonatele lui x în baza B' sunt 5 si -1.

Definitia I.1.11. În spatiul R^n , baza B=, unde:

e_1 =(1,0,...,0)
e_2 =(0,1,...,0)
"
"
e_n =(0,...,0,1)

se numeste *baza canonica.*

Efectul schimbarii bazei asupra coordonatelor unui vector

Fie (V,K) un spatiu liniar de dimensiune n, iar B=,
B' = doua baze pentru V. Daca un vector arbitrar xV are scrierile în cele doua baze:
(19) , ,
respectiv:
(20) , ,
ne propunem sa gasim relatia de legatura între coordonatele x_1 ,...,x_n si
.
Deoarece B este baza pentru V, iar f_k , atunci fie:
(21)
scrierea acestor vectori în raport cu B. Scriind coordonatele vectorilor f_k , k=1,2,...,n în baza B pe coloanele unei matrice, obtinem:

(22)
Aceasta matrice se numeste *matricea de trecere* de la baza B la baza B' .
Relatia (20) devine:
(23)
dar tinând seama de (19) rezulta:
,
adica:

sau în scriere matriceala:
(24) = M
sau x_B =M , unde prin x_B am notat vectorul coordonatelor lui x în baza B, iar prin $x_{B'}$, vectorul coordonator lui x în baza B'. Deci aici rezulta:
(25)

Lema substitutiei si aplicatii

Teorema I.1.4. (*Lema substitutiei*) Fie (V,K) un spatiu liniar de dimensiunea n si fie B=o baza pentru V, iar
$x=x_1 e_1+...+x_{i-1} e_{i-1} +x_i e_i +x_{i+1} e_{i+1} +...+x_n e_n$
un vector din V. Atunci: B' = este o noua baza pentru V daca si numai daca x_i 0.
Demonstratie " *necesitatea* "
Presupunem x_i . Pentru a arata ca B' este baza, este suficient sa aratam ca B' este liniar independent deoarece dim B' =dim V =n. Fie

o combinatie liniara nula a vectorilor din B'. Avem succesiv :

De unde:

(26)

Deoarece x_i obtinem si mai departe , , . Atunci B' este liniar independent, deci constituie o baza pentru V.

" *suficienta* "

Presupunem B' baza pentru V, deci este un sistem de vectori liniari independenti. Daca prin absurd , atunci folosinu-ne de calculele anterioare putem lua în (26) arbitrar si , pentru ceea ce arata ca B' n-ar fi liniar independent. Contradictie cu ipoteza. Deci .

<u>Consecinta.</u> Fie spatiu liniar, B=o baza iar un vector din V cu . Daca este un alt vector din V, atunci coordonatele ale vectorului *a* în baza B' = sunt date de formulele:

(27)

Demonstratie. Din , deoarece

obtinem:

si înlocuind în scrierea lui *a* în raport cu baza B avem:

adica tocmai scrierea lui *a* în raport cu B'. Acest rezultat se poate pune în doua tablouri de forma:

Tabloul (B) Tabelul (B')

Vectorul x intra în

În tabelul (B) x_i se numeste <u>*pivot*</u> si se marcheaza prin încadrarea într-un patrat sau prin încercuirea sa. Trecerea la tabel (B') se numeste *pivotaj* dupa x_i si se face în felul urmator:

1) se împarte linia pivotului la pivot;

2) în coloana pivotului elementele x_k , k se înlocuiesc cu zero;

3) elementele a_k , k (ce nu se afla în linia si coloana pivotului) se înlocuiesc cu: .

Se mai spune ca se calculeaza cu "*regula dreptunghiului*".

Lema substitutiei joaca un rol important în prezentarea algoritmului simplex pentru rezolvarea problemelor de programare liniara (vezi capitolul II din aceasta carte), dar poate fi folosita si la calcularea coordonatelor unui vector atunci când are loc o schimbare de baza în spatiul liniar, la rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare, la inversarea matricelor, etc.. Fara a demonstra toate acestea (demonstratiile sunt simple), exemplificam cu urmatoarele aplicatii:

<u>Aplicatia I.1.1</u>. Fie , baza canonica si o alta baza în R^3, matricea de trecere de la baza B la baza B' fiind:

Daca vectorul x are coordonatele (3,2,1) în baza canonica, sa se gaseasca coordonatele acestuia în baza B'.

Rezolvare Putem rezolva problema si folosind formula (25), dar cu ajutorul lemei substututiei scriem sirul urmator de tabele:

Deci $x_{B'}$=(-7,5,2).

Aplicatia I.1.2. Sa se calculeze inversa matricei nesingulare
Notând cu a^1, a^2, a^3 coloanele matricei A avem:

Aplicatia I.1.3. Deoarece rangul unei matrice poate fi definit ca numar maxim de coloane liniar independente, se foloseste lema substitutiei la calculul rangului unei matrice, ca si al unui sistem de vectori: vor fi atâtea coloane liniar independente câte se pot introduce în baza. De exemplu, pentru:

avem:

Au fost introduse doua coloane: a^2, a^1, deci rang A=2

Aplicatia I.1.4. Sa se discute si sa se rezolve sistemul:

Rezolvare. Notând cu $L=(1,3,0)^t$ coloana termenilor liberi si cu a^1, a^2, a^3, a^4 coloanele coeficientilor necunoscutelor avem:

Sistemul a devenit:

Matricea sistemului are rangul 2, sistemul este compatibil nedeterminat, necunoscutele principale fiind x_1 si x_2.
Solutia sistemului este: , .